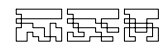


Mengenprodukte, Tupel, Listen



Paare, Tripel, ..., n-Tupel:

Ein Paar (x, y) ist die geordnete Angabe zweier Elemente x und y einer Menge M ,
 ein Tripel (x, y, z) ist die geordnete Angabe dreier Elemente einer Menge M , ...,
 ein n-Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) ist die geordnete Angabe von n Elementen einer Menge M .

$n =$	1	2	3	4	5	...
	Singel	Paar	Tripel	Quadrupel	Quintupeltupel
	(x)	(x, y)	(x, y, z)	(x, y, z, u)	$(., ., ., ., .)$	$(., ., \dots, .)$

Es gilt:

$$x \neq y \rightarrow (x, y) \neq (y, x), \quad x \neq y \rightarrow (x, y, z) \neq (y, x, z) \quad \text{etc. f\u00fcr Quadrupel, ...}$$

$$x \neq z \rightarrow (x, y, z) \neq (z, y, x) \quad \text{etc. f\u00fcr Quadrupel, ... und beliebige Positionen}$$

Mengenprodukt (Mengen A, B, C):

- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- $A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$

Es gilt: $A \neq B \rightarrow A \times B \neq B \times A$

Nicht-Kommutativit\u00e4t

$$M \times M = M^2, \quad M \times M \times M = M^3 \quad \text{usw.}$$

(einfachere Schreibweise)

Gesetze (Mengen A, B, C):

- $A \times \emptyset = \emptyset \quad \emptyset \times A = \emptyset$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ Assoziativit\u00e4t
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ Distributivit\u00e4t
- $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B) \quad C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$ Distributivit\u00e4t
- $A \subseteq B \rightarrow ((A \times C) \subseteq (B \times C) \text{ und } (C \times A) \subseteq (C \times B))$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B| \quad |A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \quad |A \times A| = |A|^2$

Anwendungsbeispiele:

- $R \times R = \{(x, y) \mid x \in R \wedge y \in R\}$ Koordinaten eines Punktes der Zahlenebene
- $R \times R \times R = \{(x, y, z) \mid x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$ Koordinaten im 3-dimens. Raum

Listen:

Eine Liste $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ist eine geordnete Angabe von n Elementen einer Menge M ,
 wobei die Elementanzahl (L\u00e4nge der Liste) n i.a. nicht bekannt ist.

Die leere Liste $[\]$ besitzt die L\u00e4nge 0.

Eine Liste wird mittels $|$ zerlegt in den Listenkopf (das ist ein Element) und die Restliste.

Beispiel: $[a, b, c, \dots] = [a \mid [b, c, \dots]]$ Gesamtliste $[a, b, c, \dots]$ Restliste $[b, c, \dots]$

Listen werden rekursiv mittels Fallunterscheidung bearbeitet.

Bei der Listenbehandlung werden die zwei F\u00e4lle "leere Liste" und "nichtleere Liste" unterschieden.

Beispiel: $\text{L\u00e4nge}([\]) = 0$ (Fall leere Liste)

$\text{L\u00e4nge}([K \mid T]) = 1 + \text{L\u00e4nge}(T)$ (Fall nichtleere Liste)

Beispiel: $\text{Summe}([\]) = 0$ (Fall leere Liste)

$\text{Summe}([K \mid T]) = K + \text{Summe}(T)$ (Fall nichtleere Liste)

$$\begin{aligned} \text{--> Bsp.: } \text{Summe}([3, 2, 4]) &= 3 + \text{Summe}([2, 4]) = 3 + (2 + \text{Summe}([4])) \\ &= 3 + (2 + (4 + \text{Summe}([\]))) = 3 + (2 + (4 + 0)) = \dots = 9 \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Tupeln und Listen:

Die Menge L aller Listen, bestehend aus Elementen einer Grundmenge M , kann als Vereinigung aller Singel (x) , Paare (x, y) , Tripel (x, y, z) , Quadrupel usw., also als Vereinigung aller n -Tupel (mit beliebigem $n \geq 0$) in einer zweckm\u00e4\u00dfigeren Schreibweise aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} L &= \emptyset \cup M \cup M \times M \cup M \times M \times M \cup M \times M \times M \times M \cup \dots \\ &= \emptyset \cup M \cup M^2 \cup M^3 \cup M^4 \cup \dots \end{aligned}$$

Mengen von	alphanumerisch sortiert	unsortiert	beachte:
Elementen	$\{a, b, c\}, \{1, 3, 7\}, \{2, B, a, c\}$	$\{a, c, b\}, \{7, 1, 3\}, \{a, 2, B, c\}$	$\{a, b, a\} = \{a, b\} = \{b, a\}$
Tupeln	$\{(a,a),(b,c)\}, \{(a,b), (b,b,a), (c,a), (c,a,a)\}$	$\{(b,b,a), (c,a), (a,b), (c,a,a)\}$	$(a,b,a) \neq (a,b) \neq (b,a)$