Mengenprodukte, Tupel, Listen

Paare, Tripel, ..., n-Tupel:

Ein <u>Paar</u> **(** x, y **)** ist die geordnete Angabe zweier Elemente x und y einer Menge **M**, ein <u>Tripel</u> **(** x, y, z **)** ist die geordnete Angabe dreier Elemente einer Menge **M**, ..., ein <u>n-Tupel</u> **(** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **)** ist die geordnete Angabe von n Elementen einer Menge **M**.

n =	1	2	3	4	5	...
	Singel	Paar	Tripel	Quadrupel	Quintupel	.....tupel
	(x **)**	**(** x, y **)**	**(** x, y, z **)**	**(** x, y, z, u **)**	**(., ., ., ., .)**	**(., ., ..., .)**

Es gilt:

$x \neq y \;\rightarrow\; (x, y) \neq (y, x)$, $\;x \neq y \;\rightarrow\; (x, y, z) \neq (y, x, z)$ etc. für Quadrupel, ...

$x \neq z \;\rightarrow\; (x, y, z) \neq (z, y, x)$ etc. für Quadrupel, ... und beliebige Positionen

---

Mengenprodukt (Mengen A, B, C):

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{B} \}$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \{ (x, y, z) \mid x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{B} \wedge z \in \mathbf{C} \}$

Es gilt: $\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \;\rightarrow\; \mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ Nicht-Kommutativität

$\mathbf{M} \times \mathbf{M} = \mathbf{M}^2$, $\quad \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} = \mathbf{M}^3$ usw. (einfachere Schreibweise)

Gesetze (Mengen A, B, C):

- $\mathbf{A} \times \varnothing = \varnothing \qquad \varnothing \times \mathbf{A} = \varnothing$
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ Assoziativität
- $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \qquad (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ Distributivität
- $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cup (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \qquad \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cap (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$ Distributivität
- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \;\rightarrow\; ((\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \subseteq (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ und $(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \subseteq (\mathbf{C} \times \mathbf{B}))$
- $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \qquad |\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}| \qquad |\mathbf{A} \times \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2$

Anwendungsbeispiele:

- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \}$ Koordinaten eines Punktes der Zahlenebene
- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x, y, z) \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge z \in \mathbf{R} \}$ Koordinaten im 3-dimens. Raum

---

Listen:

Eine <u>Liste</u> **[** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **]** ist eine geordnete Angabe von n Elementen einer Menge **M**, wobei die Elementeanzahl (Länge der Liste) n i.a. nicht bekannt ist.

Die leere Liste **[ ]** besitzt die Länge 0 .

Eine Liste wird mittels **|** zerlegt in den Listenkopf (das ist ein Element) und die Restliste.

Beispiel: **[** *a*, *b*, *c*, ...**]** = **[** *a* **|** **[** *b*, *c*, ...**]]** Gesamtliste **[** *a*, *b*, *c*, ...**]** Restliste **[** *b*, *c*, ...**]**

Listen werden rekursiv mittels Fallunterscheidung bearbeitet.

Bei der Listenbehandlung werden die zwei Fälle "leere Liste" und "nichtleere Liste" unterschieden.

Beispiel: Länge(**[ ]**) = 0 (Fall leere Liste)
Länge(**[** K **|** T **]**) = 1 + Länge(T) (Fall nichtleere Liste)

Beispiel: Summe(**[ ]**) = 0 (Fall leere Liste)
Summe(**[** K **|** T **]**) = K + Summe(T) (Fall nichtleere Liste)

--> Bsp.: Summe(**[**3, 2, 4**]**) = 3 + Summe(**[**2, 4**]**) = 3 + (2 + Summe(**[**4**]**))
= 3 + (2 + (4 + Summe(**[ ]**))) = 3 + (2 + (4 + 0)) = ... = 9

Beziehungen zwischen Tupeln und Listen:

Die Menge **L** aller Listen, bestehend aus Elementen einer Grundmenge **M**, kann als Vereinigung aller Singel **(** x **)**, Paare **(** x, y **)**, Tripel **(** x, y, z **)**, Quadrupel usw., also als Vereinigung aller n-Tupel **(**mit beliebigem $n \geq 0$ **)** in einer zweckmäßigeren Schreibweise aufgefasst werden:

$$\mathbf{L} = \varnothing \cup \mathbf{M} \cup \mathbf{M} \times \mathbf{M} \cup \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \cup \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \cup \ldots..$$
$$= \varnothing \cup \mathbf{M} \cup \mathbf{M}^2 \cup \mathbf{M}^3 \cup \mathbf{M}^4 \cup \ldots..$$

Mengen von	alphanumerisch sortiert	unsortiert	beachte:
Elementen	**{***a*, *b*, *c***}**, **{**1, 3, 7**}**, **{**2, *B*, *a*, *c***}**	**{***a*, *c*, *b***}**, **{**7, 1, 3**}**, **{***a*, 2, *B*, *c***}**	**{***a*, *b*, *a***}** = **{***a*, *b***}** = **{***b*, *a***}**
Tupeln	**{(***a*,*a***)**,**(***b*,*c***)}**, **{(***a*,*b***)**, **(***b*,*b*,*a***)**, **(***c*,*a***)**, **(***c*,*a*,*a***)}**	**{(***b*,*b*,*a***)**, **(***c*,*a***)**, **(***a*,*b***)**, **(***c*,*a*,*a***)}**	**(***a*,*b*,*a***)** ≠ **(***a*,*b***)** ≠ **(***b*,*a***)**