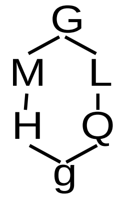
Algebraische Strukturen

Eine algebraische Struktur **(M, ⊕)** wird gebildet aus einer Menge **M** und einer auf dieser definierten binären Operation ⊕ als eine eindeutige Abbildung von **M**×**M** in oder auf **M** .

(M, ⊕) mit 1 binären Operation ⊕ heißt *(mit **M** ≠ ∅)*

- ⊙ <u>Gruppoid</u>, wenn keine weiteren Eigenschaften gefordert sind, (g)
- ⊙ <u>Halbgruppe</u>, wenn ⊕ auch <u>assoziativ</u> ist,
- ⊙ <u>Quasigruppe</u>, wenn ⊕ auch der Kürzungsregel genügt,
- ⊙ <u>Monoid</u>, wenn es eine Halbgruppe mit neutralem Element **e** ist,
- ⊙ <u>Loop</u>, wenn es eine Quasigruppe mit neutralem Element **e** ist,
- ⊙ <u>Gruppe</u>, wenn es ein Monoid mit Kürzungsregel ist.



Die Struktur heißt ABELsch, falls ⊕ außerdem <u>kommutativ</u> ist.
Eine Gruppe besitzt ein neutrales Element, und jedes Element besitzt ein Inverses.
Eine Gruppe heißt endlich oder von endlicher Ordnung, falls **M** endlich ist, anderenfalls unendlich.
Eine Gruppe heißt von einer Teilmenge **A** = **{**a, b , ...**}** erzeugt, wenn alle Elemente von **M** aus denen von **A** mittels der Operation ⊕ erzeugt werden können. Eine aus 1 Element erzeugbare Gruppe heißt zyklisch.

(M, ⊕, ⊗) mit 2 das Distributivitätsgesetzt erfüllenden binären Operationen ⊕, ⊗ heißt

- ⊙ <u>Halbring</u>, wenn **(M, ⊕)** ABELsche Halbgruppe und **(M, ⊗)** Halbgruppe ist,
- ⊙ <u>Ring</u>, wenn **(M, ⊕)** ABELsche Gruppe und **(M, ⊗)** Halbgruppe ist, ⊕-neutral.El.: **n**
- ⊙ <u>kommutativer Ring</u>, wenn außerdem **(M, ⊗)** ABELsche Halbgruppe ist,
- ⊙ <u>nullteilerfreier Ring</u>, wenn Ring mit: $x \otimes y = \mathbf{n} \rightarrow (x = \mathbf{n} \vee y = \mathbf{n})$, *(Produkt 0 nur wenn ein Faktor 0)*
- ⊙ <u>Integritätsring</u>, wenn nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement **e**, ⊗-neutral.El.: **e**
- ⊙ <u>Schiefkörper</u>, wenn Ring mit Einselement **e** und **(M \ {n}, ⊗)** Gruppe ist, ⊗-zwingend: **n**
- ⊙ <u>Körper</u>, wenn außerdem **(M \ {n}, ⊗)** ABELsche Gruppe ist.

(U, ⊕, ..) heißt <u>Unterstruktur</u> von **(M, ⊕, ..)**, wenn ∅ ≠ **U** ⊆ **M** und **(U, ⊕, ..)** selbst diese Struktur besitzt.
Untergruppen heißen trivial, falls **U** = **{e}** oder **U** = **M** , anderenfalls nichttrivial. Bzgl. **U** ist die Anzahl ind(**U**) der Linksnebenklassen a⊕**U** = **{**$x = a⊕y$ **|** $y \in$ **U}** und Rechtsnebenklassen **U**⊕a = **{**$x = y⊕a$ **|** $y \in$ **U}** gleich, sie induzieren eine Äquivalenzrelation auf **M** , bilden also Äquivalenzklassen von **M** mit ord(**M**) = ind(**U**) · ord(**U**).
Eine Untergruppe **(U, ⊕)** heißt <u>Normalteiler</u> von **(M, ⊕)**, falls ∀x∈ **M** : x⊕**U** = **U**⊕x . *(stets, falls ⊕ kommutativ)*
Ein Unterring **(U, ⊕, ⊗)** heißt Links- bzw. Rechts-Ideal von **(M, ⊕, ⊗)**, falls ∀x∈ **M** : x⊗**U** ⊆ **U** bzw. **U**⊗x ⊆ **U** , und <u>Ideal</u>, falls stets x⊗**U** = **U**⊗x , und <u>Primideal</u>, falls außerdem ∀x∈ **M** ∀y∈ **M** : (x ⊗ y) ∈ **U** → (x ∈ **U** ∨ y ∈ **U**) .

(M, ⊙, R) mit äußerer Verknüpfung ⊙ zwischen **M** und dem Operatorenbereich **R** heißt

- ⊙ <u>Modul</u>, wenn **(M, +)** eine ABELsche Gruppe, **(R, ⊕, ⊗)** einen Ring mit Einselement **1** bilden und
  ∀a,b∈ **M** ∀α,β∈ **R** : $\alpha⊙(a+b)=\alpha⊙a+\alpha⊙b$, $(\alpha\oplus\beta)⊙a=\alpha⊙a+\beta⊙a$, $(\alpha\otimes\beta)⊙a=\alpha⊙(\beta⊙a)$, $\mathbf{1}⊙a=a$
- ⊙ <u>Vektorraum</u>, wenn zudem **(R, ⊕, ⊗)** einen Körper bildet. $\alpha⊙\mathbf{n}=\mathbf{n}$, $0⊙a=\mathbf{n}$

Man spricht vom **R**-Modul oder vom Modul bzw. Vektorraum über **R**. **M** ={Vektoren}, **R** ={Skalare}

<u>Gruppe:</u>	Permutationen $(\mathbf{P}_n , \circ)$	Dreh-u.Spiegel.gruppen	$(\{\text{reg.Matrix}_{n\times n}\}, \cdot)$
<u>AB.Gruppe:</u>	n-te Einheitsw. $(\sqrt[n]{1} , \cdot)$	Drehungsgruppen	$(\{\text{Matrix}_{m\times n}\}, +)$
<u>Ring:</u>	$(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ *(komm., mit Einselement 1)*		$(\{\text{Matrix}_{n\times n}\}, +, \cdot)$
<u>Integr.ring:</u>	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$	Polynomringe $(\{P(x)\}, +, \cdot)$	
<u>Körper:</u>	$(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \otimes_p)$ *(für Primzahl p)*	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$	
<u>Vektorraum:</u>	$(\{\text{Matrix}_{m\times n}\}, \cdot , \mathbb{R})$	$(\mathbb{R}^n , \cdot , \mathbb{R})$	<u>Modul:</u> $(\mathbb{Z}^n , \cdot , \mathbb{Z})$

Eine Abbildung φ: **A** ↦ **B** zwischen zwei algebraischen Strukturen **(A, ⊕)** und **(B, E)** heißt

- <u>operationstreu</u> (Operationshom.), falls ∀a_1,a_2∈ **A**: $\varphi(a_1 \oplus a_2) = \varphi(a_1)\ \mathrm{E}\ \varphi(a_2)$
- Operationsisom., falls φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} operationstreu sind.

Bei Strukturen **(A, ⊕, ⊗)** und **(B, E, ⊙)** ist außerdem gefordert: $\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi(a_1) \odot \varphi(a_2)$
Meist wird als Abbildungsbezeichnung der Strukturname mit -homom./-isom. verbunden:
Gruppenisomorphismus, Ringhomomorphismus, Körperhomomorphismus, ...

Sind $\mathbf{e}_\mathbf{A}$ und $\mathbf{e}_\mathbf{B}$ die neutralen Element von **A** und **B** und gilt φ: **A** ↦ **B** , so heißt die Unterstruktur
$\mathbf{K}_\varphi = \{ x\in \mathbf{A} \mid \varphi(x) = \mathbf{e}_\mathbf{B} \}$ Kern des Homomorphismus φ , (für Isomorphismen gilt $\mathbf{K}_\varphi = \{ \mathbf{e}_\mathbf{A} \}$)
und die Menge der Nebenklassen bilden eine Quotientengruppe (-ring, -körper, ...) $\mathbf{A}/\mathbf{K}_\varphi$.
<u>Homomorphiesatz</u> für Gruppen ($\mathbf{K}_\varphi$ ... Normalteiler), Ringe, Körper ($\mathbf{K}_\varphi$ ... Ideal), Module, ... :
Mit der kanonischen Abbildung ψ: **A** ↦ $\mathbf{A}/\mathbf{K}_\varphi$ ist eine injekt. homomorphe (oft isomorphe) Abbildung χ: $\mathbf{A}/\mathbf{K}_\varphi$ ↦ **B** mit $\psi \circ \chi = \varphi$ eindeutig bestimmt. *Abbildungsreihenfolge*: $\varphi(x) = (\psi\circ\chi)(x) = \chi(\psi(x))$