

Zahlenbereiche - Natürliche Zahlen **N**



Peanosche Axiome (natürliche Zahlen bei Null beginnend):

- (1) Null ist eine Zahl.
- (2) Jede Zahl hat einen Nachfolger.
- (3) Null ist nicht Nachfolger.
- (4) Keine Zahl ist Nachfolger zweier verschiedener Zahlen.
- (5) Kann eine für Null geltende Eigenschaft von einer beliebigen Zahl auf deren Nachfolger gefolgert werden, so gilt sie für jede (natürliche) Zahl.

Benennung (Einführung) der natürlichen Zahlen als Nachfolger der Null:

Null: **0**, Nachfolger von **0**: **1**, Nachfolger von **1**: **2**, Nachfolger von **2**: **3**, usw.

Nachfolgerfunktion (weist jeder Zahl n ihren Nachfolger zu): suc bzw. $'$: $\text{suc}(n)$, n'

Vergleichsrelationen: $=$, $<$, $>$, \leq , \geq , \neq

Gleichheitsrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv):	$=$	$\text{suc}(0) = 0' = 1$, usw.
Kleinerrelation (irreflexiv, asymmetrisch, transitiv):	$<$	$n < n'$, $n' < (n')'$, usw.
Größerrelation (irreflexiv, asymmetrisch, transitiv):	$>$	$m > n$ für $n < m$
Kleingleichrelation (reflexiv, antisymm., transitiv):	\leq	$m \leq n$ für $m < n$ oder $m = n$
Größergleichrelation (reflexiv, antisymm., transitiv):	\geq	$m \geq n$ für $m > n$ oder $m = n$
Ungleichheitsrelation (irrefl., symmetr., nicht trans.):	\neq	$m \neq n$ für $m < n$ oder $n < m$

Operationen:

Minimumoperation (idempotent, komm., ass.):	min
$\text{min}(m, n) = m$ für $m < n$, sonst $= n$	
Maximumoperation (idempotent, komm., ass.):	max
$\text{max}(m, n) = n$ für $m < n$, sonst $= m$	
Nachfolgeroperation (k -facher Nachfolger):	$\text{msuc}(m, k)$
$\text{msuc}(m, 0) = m$, $\text{msuc}(m, k') = (\text{msuc}(m, k))'$	
Additionsoperation (kommutativ, assoziativ):	$\text{summ}(m, n) = m + n$
$m + 0 = m$ $m + n' = (m + n)'$	
Multiplikationsoperation (kommutativ, assoziativ):	$\text{prod}(m, n) = m * n$
$m * 0 = 0$ $m * n' = m * n + m$	
Potenzoperation (nicht kommut., nicht assoz.):	$\text{power}(m, n) = m^n$
$m^0 = 1$ $m^{n'} = m^n * m$	

Gesetze:

Kommutativität:	$m + n = n + m$	$m * n = n * m$
Assoziativität:	$(m + n) + k = m + (n + k)$	$(m * n) * k = m * (n * k)$
Distributivität:	$(m + n) * k = m * k + n * k$	
Neutrale Elemente:	$m + 0 = m$	$m * 1 = m$
Rechtsneutr. Element:	$m^1 = m$	

Rechenregeln (für natürliche Zahlen m, n, k):

Wenn $m = n$	so gilt:	$m + k = n + k$	$m * k = n * k$
Wenn $m = n$ und $0 < m$	so gilt:	$m^k = n^k$	
Wenn $m < n$	so gilt:	$m + k < n + k$	
Wenn $m < n$ und $0 < k$	so gilt:	$m * k < n * k$	
Wenn $m < n$ und $1 < k$	so gilt:	$m^k < n^k$	
Wenn $n < k$ und $1 < m$	so gilt:	$m^n < m^k$	